79e Année Août-Septembre 1968 N° 1-2

REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Fondée en 1890)

Sujets donnés au concour de l'Agrégation des sciences mathématiques et aux concours d'entrée aux grandes Écoles en 1968.

PREMIÈRE PARTIE

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

Mathématiques élémentaires et Mathématiques spéciales.

5828. — I. — A toute partie non vide E du plan euclidien, on associe, pour chaque entier n strictement supérieur à *un*, son *diamètre d'ordre* n, noté $d_n(E)$, défini comme suit :

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignant n points de E, et $\delta(A_1, \ldots, A_n)$ la moyenne géométrique

$$\left[\prod_{i<j\leqslant n} A_iA_j\right]^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

de leurs distances mutuelles, $d_n(E)$ est la borne supérieure, finie ou non, des nombres $\delta(A_1, \ldots, A_n)$, lorsque les n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ varient arbitrairement dans E.

Ainsi $d_2(E)$ est le diamètre de E au sens usuel.

1° *a*) Démontrer que, si E est non borné, $d_n(E)$ est infini.

b) Démontrer que, si E est inclus dans E', on a $d_n(E) \leqslant d_n(E')$.

2° Calculer $d_3(E)$ dans les cas suivants :

a) E est un segment de longueur a;

b) E est un cercle de rayon r; un arc de cercle de rayon r et de longueur θr (discuter);

c) E est un disque fermé de rayon r; un disque ouvert de rayon r;

d) E est la réunion des trois côtés d'un triangle équilatéral.

3° E étant supposé borné, démontrer, pour tout n, l'inégalité

$$d_{n+1}(E) \leqslant d_n(E).$$

En déduire que $d_n(E)$ a une limite positive ou nulle lorsque n augmente indéfiniment; cette limite sera appelée *diamètre transfini de* E, noté $d(E)$.

Dans la suite, $d_n(E)$ et $d(E)$ seront abrégés en d_n et d lorsqu'il n'y aura pas risque de confusion pour l'ensemble E.

II. — On se propose de calculer d_n et d dans le cas où E est un cercle de rayon unité.

1° $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n points du cercle rangés dans cet ordre, on pose

$$A_{n+1} = A_1, \qquad A_{n+2} = A_2, \quad \text{etc.}$$

et l'on considère les produits $p_k = \prod_{i=1}^{i=n} A_iA_{i+k}$, où k est un entier naturel.

Démontrer, pour tout k inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, l'inégalité $p_k \leqslant \left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right)^n$.

(On pourra, pour cela, utiliser la propriété de la fonction $x \longmapsto -\operatorname{Log}\sin x$ d'être convexe sur $]0, \pi[$.)

2° Déduire de ce qui précède que le produit des distances mutuelles de n points du cercle est maximal dans le cas d'une disposition régulière de ces points.

3° Calculer d_n et d.

(On pourra, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines du polynôme $z^n - 1$, introduire les produits

$$U_h = \prod_j (\alpha_h - \alpha_j),$$

où h est fixé et j décrit l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\} - \{h\}$, et montrer que U_h est égal à $n\,\alpha_h^{n-1}$.)

III. — Dans cette partie III, on étudie une méthode de détermination du diamètre transfini d'une partie E bornée du plan.

A tout point du plan on associe son affixe (complexe) dans un repère orthonormé donné.

P étant un polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré a pour coefficient *un*), on désigne par $\mu(P)$ la borne supérieure de $|P(z)|$ lorsque le point d'affixe z décrit E. Soit μ_n la borne inférieure des $\mu(P)$ lorsque P décrit l'ensemble des polynômes unitaires de degré n. On pose $m_n = \sqrt[n]{\mu_n}$.

1° *a*) Démontrer que $\mu(P)$ est fini.

b) Démontrer que m_n ne dépend que de E et de n et non du repère choisi.

c) Comparer m_1 et d_2.

2° Démontrer l'inégalité

$$m_{p+q} \leqslant m_p^{\frac{p}{p+q}} m_q^{\frac{q}{p+q}}$$

pour tout couple d'entiers p, q.

Soit m la borne inférieure des nombres m_n; démontrer que m_n tend vers m lorsque n augmente indéfiniment.

3° A tout système de $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de E, d'affixes respectives $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, on associe le déterminant :

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \ldots & z_{n+1}^{n-1} \\ z_1^n & z_2^n & \ldots & z_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Démontrer que, quel que soit le polynôme P unitaire de degré n, on a l'égalité

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_{n+1} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \ldots & z_{n+1}^{n-1} \\ P(z_1) & P(z_2) & \ldots & P(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

En utilisant le développement de ce dernier déterminant et éventuellement un polynôme P convenablement choisi en fonction des points, établir les inégalités

$$d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} (m_n)^n \leqslant d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leqslant (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} (m_n)^n.$$

4° Déduire de ce qui précède :

a) l'inégalité $d_{n+1} \geqslant m_n$;

b) une majoration de d_{n+1} faisant intervenir $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et n;

c) l'égalité $m = d$. $\left(\text{On rappelle que, si une suite } u_n \text{ admet la limite } u, \text{ la suite } \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n^2}\right.$ admet la limite $\left.\frac{u}{2}.\right)$

IV. — On se propose de calculer le diamètre transfini d'un segment par la méthode précédente.

E désigne le segment $[-1, +1]$ de l'axe réel et x une variable décrivant E.

1° Étant donné un entier naturel n, démontrer que la fonction

$$x \longmapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos\,(n \operatorname{Arc\,cos} x)$$

est la restriction à E d'un polynôme T unique, de degré n, unitaire et à coefficients réels. Quelle est la borne supérieure de son module sur E?

2° Démontrer, en considérant la différence $P - T$, que, si le polynôme unitaire P est de degré n et à coefficients réels, la borne supérieure sur E du module de P ne peut être strictement inférieure à $\frac{1}{2^{n-1}}$.

3° Quels sont pour E les nombres μ_n définis dans la partie III?

En déduire la valeur de $d(E)$ et, plus généralement, le diamètre transfini d'un segment de longueur a.

4° Démontrer qu'une condition suffisante pour que le diamètre transfini d'une partie bornée E du plan soit non nul est que E contienne un arc de courbe continu.

Donner un exemple d'ensemble dénombrable borné dont le diamètre transfini est non nul.

V. — 1° E étant une partie bornée du plan complexe et H un polynôme fixé, unitaire, de degré q, on note E_1 l'ensemble $H^{-1}(E)$ ainsi défini : le point d'affixe z appartient à E_1 si, et seulement si, le point d'affixe $H(z)$ appartient à E.

Établir la formule $d(E) = [d(E_1)]^q$.

2° A l'aide de cette formule, retrouver les valeurs des diamètres transfinis d'un segment et d'un cercle en supposant que ces diamètres sont non nuls.

3° Calculer les diamètres transfinis :

a) d'un disque;

b) d'un ovale de Cassini.

Analyse.

On désigne par **R** le corps des nombres réels, par $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls. On rappelle que le support d'une application de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ est le plus petit ensemble fermé dans le complémentaire duquel la restriction de cette application est nulle. Le corps des nombres complexes est noté **C**; la distance de deux points, z et z', de **C** est le module de $z - z'$ noté $|z - z'|$. Dans un espace topologique, on désigne l'adhérence d'une partie X par $\overline{X}$.

Dans tout le texte on note $z = x + iy$. ($z \in \mathbf{C}$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$.)

I. — 1° Soit $t \longmapsto \gamma_1(t)$ la fonction numérique définie sur **R** par

$$\gamma_1(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \leqslant 0, \qquad \gamma_1(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{si} \quad t > 0.$$

Montrer qu'elle est indéfiniment dérivable.

En déduire que la fonction γ définie dans le plan complexe par

$$\gamma(z) = \gamma_1\left(\frac{1}{2} + |z|\right)\gamma_1\left(\frac{1}{2} - |z|\right),$$

dont le support est la boule fermée de centre zéro et de rayon $\frac{1}{2}$, est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbf{R}^2$ dans **R**.

2° On note

$$\rho(z) = \frac{\gamma(z)}{a} \quad \text{avec} \quad a = \iint_{\mathbf{R}^2} \gamma(z)\, dx\, dy$$

et, pour

$$m \in \mathbf{R}^+, \qquad \rho_m(z) = m^2 \rho(mz).$$

Soit Ω un ouvert borné du plan complexe et Ω_1 un ouvert relativement compact de Ω. On désigne par α un nombre strictement positif, par d la borne inférieure de $|z - u|$ pour z élément de Ω_1 et u élément du complémentaire de Ω dans **C**, par $\Omega_{1,\alpha}$ la réunion des boules ouvertes de rayon αd et de centre dans Ω_1, enfin par $\chi_{1,\alpha}$ la fonction caractéristique de $\Omega_{1,\alpha}$.

Montrer que la fonction

$$\zeta \longmapsto \chi(\zeta) = \iint_{\mathbf{R}^2} \chi_{1,\alpha}(z)\, \rho_{(\alpha d)^{-1}}(\zeta - z)\, dx\, dy$$

est indéfiniment dérivable en tant qu'application de $\mathbf{R}^2$ dans **R**, à support compact dans Ω pour $\alpha < \frac{2}{3}$ et égale à 1 sur Ω_1.